DELLA TENSIONE
DELLE FUNI
DISSERTAZIONE

DEL P. D.

FRANCESCO MARIA FRANCESCHINIS

BERNABITA UDINESE

Professore di Matematica nell' Università di Bologna

DIRETTA ALL' ILLUSTRE GEOMETRA

IL NOB. SIG. CONTE

GIORDANO RICCATI DI TREVISO,

Con due Lettere del medesimo Signor Conte Riccati all' Autore.

BASSANO MDCCLXXXIV.

ORNATISSIMO SIG. CONTE.

1. GLI errori de' grandi uomini, mentre dall' un canto assai ne recano di meraviglia, e di sorpresa, non leggier danno dall' altro ne sogliono apportare. Avvezzi que' sublimi genii a battere francamente il cammino del vero, e a vederlo facile, e cortese allo intelletto presentarsi sempre, che il vogliano, e loro divenire domestico quasi e familiare, sembra che sì debbano le súe native sembianze aver fisse nell' animo, che niuna cosa appo di loro mentire possa impunemente l' aspetto di esso vero, niun falso lume sedurli, e niuna meno, che schietta somiglianza di verità sollecitare il loro assenso, e trarli in inganno. Dall' altra parte essendo noi per opera de' sommi uomini soliti tutto giorno nuove cose intendere, e copia ricevere di nuovi lumi, la loro autorità forma meritamente una forte prevenzione a favore delle opinioni loro, la quale può negli spiriti meno cauti, e tolleranti supplire al difetto di evidenza, che alle volte incontrasi nell' esame delle loro sentenze, e ben anche farle accettare senza disamina alcuna. Ma parte della meravi-

 glia,

glia, che ne si desta nello scorgere i più elevati spiriti dipartirsi alle volte dal vero, e seguire l' errore, ne si toglie, dove la condizione si consideri degli umani ingegni entro angusti limiti ristretti, se la infinita estensione, e combinazione delle cose si riguardi, e dove all' amore si attenda, con cui siam soliti le opinioni riguardare di novità vestite, non meno che alla pena, e molestia, che in molte difficili ricerche lo spirito accompagna, la quale alle volte mal potendo egli sostenere, facilmente per aver pace con se medesimo, e restarsi da ulteriori penosi esami, ai quali pure l' amor del vero lo stimola, alla somiglianza sola cede di esso vero, supplendo con inganno a quella forza di convizione, in cui consiste l' evidenza, che è il carattere del vero, e il solo punto, in cui deve l' umana mente nelle intellettuali cose pienamente tranquilla riposarsi. Nè per avere i sommi uomini alcuni errori sparsi in mezzo alle verità luminose da essi felicemente discoperte meno grandi sono, o meno meravigliosi, nulla togliendo al merito quello, che può dirsi condizion di natura. Il danno poi, che dal favore ne viene, che l' autorità de' sommi uomini a loro errori concilia, di essere cioè quasi ciecamente adottati dalla maggior parte,

pare

pare che riparato esser possa o per opera di altri egualmente grandi ingegni, a' quali l'autorità de' loro eguali nulla imponendo facilmente gli errori discuoprano, ove si nascondono, o per una estrema cautela, e vigilanza de' minori, la quale facendo legge allo intelletto di non assentire, che all' evidenza, dove questa possa aver luogo, vincitrice rimanga di ogni prevenzione, e il vero dal falso giunga pure nelle opere de' primi uomini a distinguere, e separare: e pienamente per questi minori ingegni verrà tolto il danno dagli errori prodotto de' più felici, se la lodevole animosità, e coraggio avranno di palesemente discoprirli, e confutarli, che per tal modo potranno, se non altro far nascere sospetto in altrui, che errore vi abbia, e desteranno altri a più attento esame delle controverse opinioni; nè temer già debbono di cimentarsi con uomini di gran lunga a se superiori, poichè dove la ragione veggano essere dalla loro, arrivando questa a balenare sugli occhi de' loro avversarj rinnoveranno essi i portenti dell' incantato luminoso scudo di Ruggiero, che ricoperto di un velo, e impugnato da mano timida, e imbelle contro poderoso nemico, se dalla nemica lancia il velo squarciato, o dalla mano del timido guerriero disciolto ve-

niva, lo splendore di esso per modo l' intrepido avversario feriva, che in terra stramazzava, ed ogni vigore, e forza perdendo, preda si rimaneva dell' ineguale campione, o per meglio dire dell' incantato lume meraviglioso.

2. Da siffatto ragionare, chiarissimo sig. Conte, voi già vi avvisate, che io la mi sono presa in qualche maniera, o me la voglio prendere con qualche grand' uomo, che ho confidenza di non avere il torto, e l' animosità insieme di comunicare altrui li miei pensamenti; nè mal vi apponete, poichè avendo io intenzione di scrivervi intorno alla tensione delle funi mi cade di dover confutare una nuova teoria dell' illustre Abate Frisio, e sono persuaso, che la verità questa volta abbandoni le sue scoperte, che pur pressochè sempre le ha accompagnate; ma ciò non crederò io assolutamente, se favorevole prima il giudizio vostro non abbia, a cui perciò dirigo la presente mia qualsiasi operetta, la quale quando pur affatto di ogni pregio mancasse, potrebbe qualche nome acquistarsi per la celebrità dell' avversario, onore splendidissimo di Milano non solo, ma di Italia tutta, e per quella del giudice da me scelto, alla cui famiglia, ed a lui stesso gran parte debbono le Matematiche del lustro, ed incremen-

to,

to, che in Italia acquistarono, e nuovi ajuti, e splendore ne sperano tuttavia.

3. Leggendo io il secondo tomo dell' opere ultimamente impresse di questo grand' uomo trovai, che discorrendo egli della tensione delle funi, propone per misura della forza, di cui vengono caricate le parti di una fune fissa in due punti per l' azione di un peso, che la tende, i coseni degli angoli formati dalle direzioni delle due braccia della fune con la direzione del peso tendente, non già i seni de' medesimi angoli, o i lati ad essi seni proporzionali del parallelogrammo, di cui la diagonale esprimesse il peso tendente. Questa maniera di calcolare gli effetti di esso peso, e i rapporti delle tensioni col peso tendente già prodotta dal medesimo Frisio in altra sua opera, mi sorprese, e m' invogliò di cercare primieramente direttamente la proporzione di siffatte tensioni, e ciò altresì per vie nuove, e partendo da principj dell' ultima evidenza, e usando della sicura scorta dell' analisi, poi di trovare il vizio della nuova teoria, ed indicarne ad un tempo gli assurdi, scorrendo per tutti i casi di esse tensioni, lo che facendo spero di aver posto in piena luce siffatta teoria, che nella pratica assaissimo influisce. Nè credo io già, che di ciò meco

 do-

doler si voglia il chiarissimo Abate Frisio; che anzi conoscendolo io egualmente grande d'ingegno, che generoso, e sincero di animo, e amico del vero, spero me ne vorrà saper grado, quando pur riescami di scoprire l'origine del suo inganno, godendo altresì, che gli altri ne sieno avvertiti, che più sempre le scienze promuovansi, e venga finalmente senza contesa fissata una teoria alla pratica di grandissimo uso, e giovamento.

4. Ma eccomi in materia. Sia (fig. 1) la funicella APB attaccata a due punti fissi A, B colle sue estremità, e possa per essa scorrere liberamente il peso P. E' chiaro, che il peso P si fermerà in quel punto P della funicella, nel quale il peso medesimo si troverà col suo centro di gravità il più basso, che sia possibile.

5. Ora, attesa la costante lunghezza della funicella è manifesto, che il peso P col suo moto descrive nel piano verticale APB, che passa per li due punti fissi A, B un'elisse, che ha per fochi i due punti A, B, e per asse maggiore la lunghezza della funicella APB. E' poi dell'ultima evidenza, che il punto più basso di questa elisse è quello, in cui la tangente è orizzontale.

6. Sia dunque FPT la tangente, che riesce orizzontale; sarà P il punto, in cui si fermerà

il

il peso P. Pertanto la verticale PO taglierà per metà l' angolo APB, come consta dalla proprietà nota dell' elisse di avere cioè gli angoli APF, APT eguali. Allora tutto il peso P s' impiegherà a tendere la funicella, e la tensione dell' una, e dell' altra parte AP, BP sarà la medesima. Poichè presa nella verticale la porzione PO ad arbitrio, che esprima il peso totale P, e condotte le OG, OV parallele alle BP, AP, che incontrino le stesse AP, BP prolungate in G, V, risulterà il parallelogrammo OVPG, che sarà un rombo, giacchè l' angolo GPO, e però anche il suo alterno POV si è veduto dover essere eguale all' OPV, onde VO = PV. Ora PG, PV stanno a PO, come le forze del peso P agenti secondo le direzioni AP, BP stanno al peso totale. Ma le forze, con cui il peso P tende le due parti AP, BP della funicella, non possono essere, se non le forze, con cui il peso P agisce secondo le direzioni AP, BP. Dunque la funicella è tesa egualmente da una parte, e dall' altra, e la forza, con cui è tesa, sta al peso totale P, come PV, o PG a PO.

7. Queste due forze tendenti sono quelle stesse, che caricano i due punti fissi A, B, come è manifesto. Dunque i due punti fissi A, B sono caricati egualmente dal peso P, e la forza,

con

con cui ciascuno di essi è tirato dal peso P verso P, che è la stessa, colla quale è tesa la funicella, sta al peso totale P, come PG, o PV a PO.

8. Calate le perpendicolari OI, OE sopra le direzioni AP, BP della funicella, le PI, PE saranno eguali, essendo esse i coseni d' angoli eguali, e però saranno atte ad esprimere la proporzione, che hanno tra di loro le forze, che caricano i due punti fissi A, B nella direzione delle funi, o vogliam dire le forze tendenti le due parti AP, BP della funicella, ma non saranno atte ad esprimere rispetto a PO la proporzione di queste medesime forze al peso totale P, essendo certissimo, e chiarissimo pel principio della risoluzione delle forze, che la forza agente secondo AP, o BP sta al peso totale P non come PI, o PE, ma come PG, o PV a PO.

9. Nè dicasi, che risoluto il peso totale P espresso per PO nelle due forze PV, PG, mentre la forza PG tende la fune AP, l' altra PV, potendosi risolvere nelle due VS perpendicolare ad AP, e PS secondo AP, colla parte PS = GI tende anche essa la fune AP. Perchè questo non vuol dir altro, se non che io posso al peso totale espresso per PO sostituire le tre forze VS, PG, PS, o sia le due VS, PI. Ma altro è, che io possa fare questa sostituzione,

al-

altro, che io debba farla. Io non debbo farla, quando non vi sia ragione di farla, piuttosto per rapporto all'una fune AP, che per rapporto all'altra BP. Ma non v'è ragione di farla, piuttosto per rapporto all'una fune, che per rapporto all'altra; dunque non debbo farla. Ma si dirà, facciasi per rapporto ad amendue, come fa diffatti il chiarissimo Frisio. Or questo è ciò che io dico assolutamente, che non può farsi. E vaglia il vero, posso io bensì al peso totale espresso per PO sostituire le tre forze VS, PG, PS, oppure le tre GH, PV, PH, ma non posso ad esso sostituire insieme le tre VS, PG, PS, e le tre GH, PV, PH; imperocchè a lui equivalendo tanto le tre VS, PG, PS, quanto le tre GH, PV, PH sostituendo tanto le tre prime, quanto le tre seconde verrei a considerare il peso assoluto P due volte. Io poi non so per qual ragione sostituendo al peso totale P le sei forze VS, PG, PS; GH, PV, PH si dovessero computare le quattro PG, PS; PV, PH, e trascurar le due VS, GH, delle quali la VS è bensì incapace di tendere la fune AP, a cui è perpendicolare, ma contribuisce per altro a tendere la fune BP; come pure la GH è bensì incapace di tendere la fune BP, cui è perpendicolare, ma contribuisce a tendere la fu-

ne

ne AP. Di più non vedo, come si consideri la forza PG come tendente la fune AP insieme con la PS, e nello stesso tempo si dica, che colla parte PH tende l' altra fune PB: non è egli questo un considerare l' effetto maggiore della sua causa? Non è egli un considerare la parte PH come tutta impiegata a tendere la fune AP, e insieme come tutta impiegata a tendere l' altra fune PB?

10. Parmi dunque, sig. Conte, di dover credere, che la forza, con cui il peso P tende ciascuna delle due funi AP, BP, stia al peso totale P, come PG, o PV a PO, e non già come PI, o PE a PO, cioè sarà essa $= \frac{P.PG}{PO}$, e non già $= \frac{P.PI}{PO}$. Vedesi apertamente, che lo stesso discorso sin qui fatto si può applicare al caso, che l' angolo APB sia ottuso, facendo le debite mutazioni.

11. Quantunque però io dica essere la forza, che impiega il peso P a tendere la fune PB, o la fune PA, $= \frac{P.PG}{PO}$, non mi opporrò perciò a chi pretendesse, che la tensione della fune, cioè la forza, che fanno le sue parti per non disunirsi, debba esprimersi per $\frac{2P.PG}{PO}$. Poichè vedo

do benissimo, che ciascuno dei due punti fissi A, B colla sua reazione fa le veci di un altro peso $\frac{P.\,PG}{PO}$, onde la fune PB è tesa, come lo sarebbe, se in P, e B passasse sopra due carrucole, e avesse pendenti di qua, e di là due pesi ciascuno $= \frac{P.\,PG}{PO}$, donde apparisce che volendo misurare la tensione dalla quantità assoluta del peso tendente sarebbe essa appunto $= \frac{2.\,PG}{PO}$. Ma questa discussione nella presente ricerca poco monta, e dall' altra parte nel paragonare le tensioni sarà in arbitrio il farle o eguali al peso totale, e assoluto, che le produce, o alla metà di lui, bastando solamente non passar da una misura all' altra, e adottatane una servirsi sempre di quella.

12. Tornando all' argomento principale io son d' avviso, sig. Conte, che per mettere in chiaro il punto controverso basti considerare, che la funicella invece di essere fissata nei punti A, B passi per due carrucole collocate in A, e B, e cercare qual peso debba intendersi attaccato a ciascuna estremità, affinchè supposto attaocato in P il peso P si abbia nel caso dell' equilibrio l' angolo APB, che si aveva, allorchè essendo la

fu-

funicella fissata in A, e in B il peso P poteva liberamente scorrere lungo la funicella medesima.

13. Sia dunque (fig. 2) attaccato al punto P della funicella il solito peso P, e invece di essere raccomandata la funicella ai punti fissi A, B, come allor quando il peso P poteva scorrere liberamente per la funicella, passi essa per due carrucole fisse in A, B, e pendano dalle due estremità due pesi eguali Q, Q. E' chiaro, che secondo che i due pesi eguali Q, Q saranno maggiori, o minori, anche l' angolo APB, che si avrà nel caso dell' equilibrio sarà maggiore, o minore. E' chiaro ancora che l' angolo APB sarà diviso nel caso dell' equilibrio per metà dalla verticale PO, poichè i pesi Q, Q sono eguali e fanno le veci della reazione del punto A, e del punto B nel caso di avere la fune fissa in A, e in B, e di aver il peso libero a scorrere lungo la funicella, nel qual caso si vide, che la reazione del punto A era eguale a quella del punto B, perchè l' angolo APB veniva diviso per metà dalla verticale PO, e solo restava a decidere, se questa reazione avesse al peso P la proporzione del seno dell' angolo OPB, o OPA al seno di tutto l' angolo APB, oppure quella del coseno dell' angolo OPB, o OPA al raggio, di modo che chiamando 2α l' angolo

APB

APB la quistione era di trovare, se la reazione di ciascun punto A, B è $\frac{P.sin.\alpha}{sin.2\alpha}$, oppure $P.cos.\alpha$.

14. Qualunque pertanto sia la grandezza dei due pesi eguali Q, Q è certo, che nel caso dell' equilibrio il centro di gravità de' tre pesi P, Q, Q deve essere disceso massimamente; cioè condotta nel piano APB l' orizzontale BC, che venga incontrata dalle verticali QA, PO in C, D, deve essere un massimo l' espressione $\frac{Q.QC+P.PD+Q.QB}{Q+P+Q}$ della distanza del comune centro di gravità dei tre detti pesi P, Q, Q dal termine CB, secondo il noto Teorema, che detta distanza si è eguale alla somma dei momenti divisa per la somma delle masse. Avremo dunque secondo il metodo dei massimi, e dei minimi $\frac{Q.dQC+P.dPD+Q.dQB}{Q+P+Q}$ $=0$, cioè $Q.dQC+P.dPD+Q.dQB=0$. Ma $QC=QA+AC$, e $d.QC=d.QA$ perchè AC è costante. Dunque deve essere $Q.dQA+P.dPD+Q.dQB=0$, ma $QA+AP$ è costante, come pure $QB+BP$, e però $dQA+dAP=0$, e $d.QA=-dAP$ come pure $dQB=-dBP$. Dunque deve essere $P.dPD-Q(dAP+dBP)=0$. Chiamando 2β l' angolo APB qualunque

que egli siasi, e dovendo essere, come si è notato, $APO = BPO$, sarà $1 : cos.\beta :: BP : PD$, e però $PD = BP.cos.\beta$, onde $dPD = dBP.cos.\beta - BP.d\beta.sin.\beta$, con che l'equazione diventa $P.dBP.cos.\beta - P.BP.d\beta.sin.\beta = Q(dAP + dBP)$. Facendo $= \pi$ i gradi 180, e $= \delta$ l'angolo dato ABC sarà l'angolo $PAB = \pi - QAP - CAB = \pi - \beta - \frac{\pi}{2} + \delta = \frac{\pi}{2} - \beta + \delta$, e l'angolo $PBA = \frac{\pi}{2} - \beta - \delta$. Ora $AB : AP :: sin.2\beta : sin.(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta)$, e $AB : BP :: sin.2\beta : sin.(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta)$, e però $AP = AB.sin.\frac{(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta)}{sin.2\beta}$, e $BP = AB.\frac{sin.(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta)}{sin.2\beta}$, o sia $AP = AB.cos.\frac{(\beta + \delta)}{sin.2\beta}$, e $BP = AB.cos.\frac{(\beta - \delta)}{sin.2\beta}$, perchè generalmente $sin.(\frac{\pi}{2} - \gamma) = cos.\gamma$. Sarà pertanto $d.AP = AB.\frac{-sin.2\beta.d\beta\,sin.(\beta + \delta) - 2d\beta.cos.2\beta.cos.(\beta + \delta)}{(sin.2\beta)^2}$, e $dPB = \frac{AB.-sin.2\beta.d\beta.sin.(\beta - \delta) - 2d\beta.cos.2\beta.cos.(\beta - \delta)}{(sin.2\beta)^2}$.

L'equazione dunque diventa (moltiplicando tut-

to

to per $(sin.2\beta)^2$, e dividendo per $-$ AB.$d\beta$)

$P.cos.\beta.sin.2\beta.sin.(\beta-\delta)+2P.cos.\beta.cos.2\beta.cos.(\beta-\delta)+P.sin.\beta.sin.2\beta.cos.(\beta-\delta)=$

$Q(sin.2\beta.sin.(\beta+\delta)+2cos.2\beta.cos.(\beta+\delta)+sin.2\beta.sin.(\beta-\delta)+2cos.2\beta.cos.(\beta-\delta))$,

cioè $P.cos.\beta(sin.2\beta.sin.(\beta-\delta)cos.2\beta+cos.(\beta-\delta))+P.cos.(\beta-\delta)(cos.\beta.cos.2\beta+sin.\beta.sin.2\beta)$

$=Q(sin.2\beta.sin.(\beta+\delta)+cos.2\beta.cos.(\beta+\delta))+Q sin.2\beta.sin.(\beta-\delta)+cos.2\beta.cos.(\beta-\delta))+Q cos.2\beta(cos.(\beta+\delta)+cos.(\beta-\delta))$, cioè

$P.cos.\beta.cos.(\beta+\delta)+P.cos.(\beta-\delta).cos.\beta=Q.cos.(\beta-\delta)+Q.cos.(\beta+\delta)+Q cos.2\beta(cos.(\beta+\delta)+cos.(\beta-\delta))$, e dividendo tutto per $cos.(\beta+\delta)+cos.(\beta-\delta)$

$P.cos.\beta=Q+Q cos.2\beta$.

Ma $1+cos.2\beta=2(cos.\beta)^2$. Dunque $P.cos.\beta=2Q.(cos.\beta)^2$, cioè $P=2Q.cos.\beta$, e moltiplicando tutto per $sin.\beta$,

$P.sin.\beta=2Q.sin.\beta.cos.\beta$.

Ma $2sin.\beta.cos.\beta=sin.2\beta$. Dunque $P.sin.\beta=Q.sin.2\beta$.

Ora voi subito intendete, che, affinchè Q sia quel peso, che nel caso dell' equilibrio porta che l'angolo APB sia $=2\alpha$, quale fu supposto nel caso, che la funicella fosse fissata nei punti A, B, ed il peso P potesse scorrere, e fermarsi dove l'equilibrio esigesse, bisognerà porre α in

B luo-

luogo di β nella equazione trovata, e avrassi $Q = \frac{P.sin.\alpha}{sin.2\alpha}$, e non già $Q = P.cos.\alpha$.

15. Siccome la carrucola fissa, per quanto si mutino le direzioni delle funi, non contribuisce in alcun modo ad alterare il momento delle forze applicate all' estremità della fune, così è chiaro, che la forza, con cui il peso P agisce secondo ciascuna delle due direzioni PA, PB, e con cui per conseguenza questo peso concorre a tendere le funi AP, BP, e a caricare i punti A, B secondo le direzioni AP, BP quando la fune è fissa in A, e in B, e il peso P può liberamente scorrere lungo la fune, è eguale a $\frac{P.sin.\alpha}{sin.2\alpha}$ essendosi trovato tale il peso Q che fa ora le veci di quella forza.

16. Del resto il problema può sciogliersi più generalmente alla seguente maniera. Passando (fig. 3) per le due carrucole fisse in A, e B la fune QAPBR, al cui punto P è attaccato un dato peso P, pendano dalle due estremità di essa altri due dati pesi Q, R. Si cerca lo stato dell' equilibrio, supposto, come è indubitato, che allora il centro di gravità dei tre corpi debba essere disceso per un massimo.

17. Riferendo tutto alla retta orizzontale BC me-

mediante le direzioni verticali QC, PI, RB dovrà essere, come si trovò di sopra, $P.dPI - Q.dAP - R.dBR = 0$. Calando dunque PD perpendicolare sopra BA, e facendo $AB = a$, $BD = x$, $DP = y$ sarà $AP = \sqrt{(a-x)^2 + yy}$, e $BP = \sqrt{xx + yy}$, e dato essendo l' angolo POD della verticale colla AB, talchè sia $PO : PD :: a : b$ si avrà $PO = \frac{ay}{b}$, e $DO = \frac{y\sqrt{aa-bb}}{b}$, e $OB = x - \frac{y\sqrt{aa-bb}}{b}$; e per essere $PO : OD :: BO : OI$, cioè $\frac{ay}{b} : \frac{y\sqrt{aa-bb}}{b} :: x - \frac{y\sqrt{aa-bb}}{b} : OI$ sarà $OI = \frac{x\sqrt{aa-bb}}{a} - \frac{ay}{b} + \frac{by}{a}$, onde $PI = \frac{x\sqrt{aa-bb} + by}{a}$. Dunque $d.AP = -\frac{(a-x)dx + ydy}{\sqrt{(a-x)^2 + yy}}$, $d.BP = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{xx + yy}}$, e $d.PI = dx\frac{\sqrt{aa-bb} + bdy}{a}$, e però l' equazione del problema sarà $\frac{P.dx\sqrt{aa-bb} + Pbdy}{a} + \frac{Q.(a-x)dx - Qydy}{\sqrt{(a-x)^2 + yy}} - \frac{Rxdx - Rydy}{\sqrt{xx + yy}} = 0.$

E perchè questa equazione deve verificarsi an-

che nel caso, che si voglia supporre x costante, e variabile solo y, come pure nel caso che vogliasi supporre costante y, e variabile solo x, perciò deve essere insieme $\frac{Pb}{a} \frac{-Qy}{\sqrt{(a-x)^2+yy}} \frac{-Ry}{\sqrt{xx+yy}} = 0$, e $\frac{P\sqrt{aa-bb}}{a} \frac{+Q(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+yy}} \frac{-Rx}{\sqrt{xx+yy}} = 0$.

Facciasi ora l'angolo dato OPD $= \alpha$, l'incognito DPA $= \chi$, e l'altro incognito DPB $= \xi$. Si avrà $a : b :: 1 : cos.\alpha$, e $a : \sqrt{aa-bb} :: 1 : sin.\alpha$, e $\sqrt{(a-x)^2+yy} : y :: 1 : cos.\chi$, e $\sqrt{(a-x)^2+yy} : a-x :: 1 : sin.\chi$, e $\sqrt{xx+yy} : y :: 1 : cos.\xi$, e $\sqrt{xx+yy} : x :: 1 : sin.\xi$, onde $\frac{b}{a} = cos.\alpha$, $\frac{\sqrt{aa-bb}}{a} = sin.\alpha$, $\frac{y}{\sqrt{(a-x)^2+yy}} = cos.\chi$, $\frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2+yy}} = sin.\chi$, $\frac{y}{\sqrt{xx+yy}} = cos.\xi$, e $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}} = sin.\xi$. Fatte queste sostituzioni le due equazioni trovate diventano

$P.cos.\alpha - Q.cos.\chi - R.cos.\xi = 0$, $P.sin.\alpha + Q sin.\chi - R.sin.\xi = 0$.

La seconda dà $R = \frac{P.sin.\alpha + Q.sin.\chi}{sin.\xi}$.

Que-

Questo valore posto nella prima somministra . $P.\cos.\alpha.\sin.\xi - P.\sin.\alpha.\cos.\xi = Q.\cos.x.\sin.\xi + Q.\cos.\xi.\sin.x$.

cioè $P.\sin.(\xi - \alpha) = Q.\sin.(x + \xi)$. Dunque $P : Q :: \sin.APB : \sin.OPB$.

Pongasi nella equazione $R = \frac{P.\sin.\alpha + Q.\sin.x}{\sin.\xi}$

il valore di $Q = \frac{P(\cos.\alpha \sin.\xi - \sin.\alpha \cos.\xi)}{\cos.x \sin.\xi + \cos.\xi \sin.x}$, e si avrà $R =$

$$\frac{P.\sin.\alpha + P \sin.x \frac{(\cos.\alpha \sin.\xi - \sin.\alpha \cos.\xi}{\cos.x \sin.\xi + \cos.\xi \sin.x,}}{\sin.\xi}$$

cioè $R = \frac{P.(\sin.\alpha \cos.x \sin.\xi + \sin.\alpha \cos.\xi \sin.x + \cos.\alpha \sin.\xi \sin.x - \sin.\alpha \sin.x \cos.\xi),}{\sin.\xi (\cos.x \sin.\xi + \cos.\xi \sin.x}$

cioè $R = \frac{P(\sin.\alpha \cos.x + \cos.\alpha \sin.x}{\cos.x \sin.\xi + \cos.\xi \sin.x}) =$

$\frac{P.\sin.(\alpha + x)}{\sin.(x + \xi)}$, e però $P : R :: \sin.APB : \sin.OPA$.

18. Presa nella verticale PO la PG per esprimere il peso P, indi prodotte le AP, BP, e compito il parallelogrammo HPKG sarà $PG : PK :: \sin.APB : \sin.OPB$, e $PG : PH :: \sin.APB : \sin.OPA$. Dunque è chiaro, che i pesi Q, R rispetto al peso P rappresentato dal-

la diagonale PG vengono espressi per i lati PK, PH del parallelogrammo.

19. Ma i pesi Q, R fanno le veci delle forze, con cui i punti A, B reagiscono allorchè la fune è fissa in A, e B, e il peso P è obbligato al punto P dalla fune; e a queste reazioni è chiaro che sono proporzionali le tensioni delle due parti AP, PB della fune; dunque la tensione della parte AP sta alla tensione della parte PB, come Q : R, cioè :: *sin*.OPB : *sin*.OPA, cioè come PK : PH. Dunque la tensione della parte AP sta alla tensione della parte PB, come il lato PK al lato PH, cioè come il seno GT dell' angolo OPB al seno GS dell' angolo OPA, e non già come PS a PT, o sia come il coseno dell' angolo APO al coseno dell' angolo OPB.

19. Se il principio, onde partii, è dell' ultima evidenza, se il calcolo è per se stesso una guida sicura, non potrassi dubitare delle consequenze, che ne vennero, che sospettando di mal uso da me fatto di esso calcolo; ma questo non credo già io mi si possa imputare, che più volte, e scrupulosamente ogni passo esaminai, che alla consequenza distruggente la nuova teoria del chiarissimo avversario mi condusse.

20. Nè, chiarissimo sig. Conte, credo io che giovar possa all' illustre Frisio quello, che dif-

fatti

fatti egli asserisce, cioè che dee farsi la risoluzion ultima delle forze, perchè questa risoluzione ultima è già fatta subito, che alla forza PG si sono sostituite le due PH, PK, a cui essa equivale. Ben è vero, che può risolversi ciascuna di queste due in altre, ma questo vuol dire, che a ciascuna delle due posso sostituirne altre, ma non già, che alla PG dopo di avere già sostituite le due PH, PK io possa sostituire anche quelle, o alcuna di quelle, in cui queste due PH, PK possono risolversi, altrimenti alla PG sostituirei più forze di quelle, alle quali essa equivale, come già si notò sin da principio.

21. Ma quello che può forse favorire la proporzione dei coseni si è, che facendo uso dei coseni trovasi nulla la tensione della parte AP (fig. 4) quando essa sia orizzontale, e l' altra parte BP verticale, come diffatti deve essere. Peraltro questo apparente favore vien meno per i coseni, avvertendo che trovasi nulla la suddetta tensione anche facendo uso della ragione reciproca dei seni; infatti (fig. 3.) essendo la tensione della fune AP alla tensione della BP come il seno dell' angolo OPB al seno dell' angolo OPA svanendo in questo caso l' angolo OPB, e facendosi retto l' angolo OPA sarà la tensione del-

 la

la AP alla tensione della BP come zero a uno.

22. Il caso poi della fune attaccata a un punto fisso A (fig. 5), e fatta passare sopra di un appoggio fisso in P posto nella stessa orizzontale con A pendendo dall' altra estremità C un peso non ha niente che fare con la presente ricerca, essendo questo il caso della carrucola fissa posta in P, sopra della quale passando la fune si sa che le forze applicate di qua, e di là per essere in equilibrio bisogna, che sieno eguali, qualunque sieno le direzioni delle due parti della fune.

23. Io credo che un caso, il quale affatto decide, e mostra erronea la ragion de' coseni, sia il seguente. Suppongasi attaccata in A, e in B la fune (fig. 6), e attaccato al punto P di essa il peso, e sia la parte BP della fune verticale, l' altra AP eguale alla distanza del punto A da P, ma non posta orizzontalmente restando il punto A più alto di P. E' chiaro, che in questo caso la fune AP non resta tesa per modo alcuno dal peso P, poichè è manifesto, che in questa disposizion di cose è lo stesso, o che la fune sia attaccata in A, o che sia semplicemente appoggiata al punto A giacchè qui si prescinde dal peso della fune. Ora quando fosse semplicemente appoggiata al punto

to A, ognun vede, che non potrebbe esser tesa dal peso P, poichè per essere tesa, e non cedere alla forza tendente vi si ricerca una reazione in A, la quale non può esservi, se la fune in A non è attaccata. Dunque se è lo stesso nello stato presente di cose, o che la fune sia attaccata in A, o che sia semplicemente appoggiata, siccome non è tesa dal peso P quando fosse solo appoggiata, così non lo sarà essendo pur anche attaccata. In fatti la ragion reciproca dei seni degl' angoli ci dà, che la fune AP non sia punto tesa, perchè avremo (fig.3) tensione di AP a tensione di BP come il seno di OPB, che qui è zero, al seno di OPA, che qui è l' angolo BPA, il cui seno è proporzionale il peso totale P: onde si vede, che tutto il peso P s' impiega a tendere BP, e per niun modo contribuisce a tendere AP. Ma se faremo uso dei coseni, avremo la tensione di AP alla tensione di BP come il coseno di OPA, che qui è l'angolo stesso BPA al coseno di OPB, che qui è zero, il cui coseno è 1, cioè sarebbe una tensione all' altra come il coseno di APB al raggio, e però si troverebbe per la parte di fune AP una tensione, che in niun modo le compete. Infatti il raggio in questo metodo di misurar le tensioni è proporzionale al peso totale,

tale, e però si avrebbe la tensione della parte BP espressa per la medesima quantità, per cui si esprime il peso totale P, il che porterebbe, che il peso P s' impiegasse tutto a tendere la parte di fune BP, e insieme s' impiegasse in parte a tendere l'altra parte di fune AP, il che è assurdo.

24. Ma nuova accusa di falsità per l' uso de' coseni, e conferma di verità per quello dei seni vien mossa dal caso che l' angolo APB (fig. 7) impicciolendosi a poco a poco divenga in ultimo $= 0$. Diffatti chi non dirà, che quando i due punti fissi A, B sono andati a cadere nella medesima verticale l' uno, e l' altro non sostenti allora la metà del peso P? Ciò appunto troveremo servendoci delle formole date per i seni; imperciocchè essendo allora lo stesso, o che il peso P possa scorrere liberamente per la fune, o che sia obbligato al punto P, poichè allora il peso P ancorchè libero non ha più luogo di scorrere, ci serviremo della formola trovata da principio, che ci dà la forza, con cui resta dal peso P caricato ciascun punto fisso A, B espressa per $\frac{P \cdot sn.\alpha}{sin.2\alpha}$, la quale nel nostro caso per essere $\alpha = 0$ diventa $\frac{P \cdot 0}{0}$, cioè $\frac{0}{0}$. Per intendere il significato di questo $\frac{0}{0}$ si

dif-

differenzii secondo il noto metodo tanto il numeratore, quanto il denominatore. Si avrà $\frac{P.d\alpha.cos.\alpha}{2d\alpha.cos.2\alpha}$, cioè $\frac{P.cos.\alpha}{2cos.2\alpha}$, ma per essere $\alpha = 0$, si ha $cos.\alpha = 1$, e $cos.2\alpha = 1$, dunque resta $\frac{P}{2}$. Dunque la forza, con cui viene caricato ciascun punto fisso A, B, è appunto la metà del peso totale P. Facendo uso del metodo dei coseni sarebbe questa forza $= P.cos.\alpha$, cioè P, e l' uno, e l' altro punto fisso sentirebbe la forza di tutto il peso P, cosa, che è assurda, e contradice a ciò, che l'autore insegna, cioè, che supposta la fune composta di più fili per avere la tensione di ciascun filo bisogna dividere il peso P pel numero dei fili, che compongono insieme l'una, e l'altra parte AP, BP della fune, il che suppone, che l' una parte AP senta la metà del peso P, e l'altra parte BP l' altra metà.

25. Ne è da dire, che l' autore in questa teoria cerchi la proporzione tra le forze, che tendono le due parti AP, PB della fune, la qual proporzione appunto si può esprimere per $P.cos.\alpha : P.cos.\alpha$, nel caso degl' angoli eguali e non già anche la proporzione della forza tendente ciascuna parte di fune al peso totale P.

Poi-

Poichè dall' esempio, che egli porta nell' ultimo, apparisce, che egli intende col suo metodo di determinare anche la proporzione, che ha forza tendente ciascuna parte della fune al peso totale P. Infatti egli dice, (fig. 8) che data una verticale EAC, e dati due punti R, Q per trovare di qual lunghezza debba essere la fune RAQ affinchè un peso attaccato in A tenda la parte RA con una forza, che stia al peso totale come 1 : P, bisogna condurre da R alla EC una retta RA talmente ad essa inclinata, che il raggio stia al coseno dell' angolo RAC : : P : 1, segno evidente, che egli è persuaso, che il peso totale abbia sempre alla forza tendente ciascuna parte della fune quella proporzione, che ha il raggio al coseno dell' angolo, che quella parte di fune fa con la verticale. E qui è da notare, che supposta dunque condotta la RA per modo che stia 1 : *cos.* RAC : : P : 1, la tensione della fune RA secondo l' autore sarà quella che si voleva. Or è chiaro, che questa tensione non si muterebbe secondo i principj dell' autore sin tanto che il peso attaccato in A, e l' angolo RAC si mantenessero i medesimi, onde fatto centro in A, e descritto coll' intervallo AQ un circolo potrebbesi fissare l' altra estremità Q della fune in qualsivo-

sivoglia punto della periferia di questo circolo, senza che si alterasse punto la tensione della fune RA, cosa che sarà da ognuno riconosciuta per assurda interamente, perchè egli è certo, che secondo che l'angolo QAE sarà minore, maggiore sarà la parte del peso attaccato in A, che viene sostenuta dalla fune AQ, e che per conseguenza tanto minore sarà quella parte, che verrà sostenendosi dalla forza RA, e quindi tanto minore la tensione di questa fune RA.

26. E questa riflessione stessa, cioè che nel metodo dei coseni la diversa posizione di una delle due parti della fune come AQ rispetto alla verticale non viene ad influir punto nella tensione dell' altra parte RA, pare che basti a provare erroneo il metodo stesso.

27. Esamino finalmente il caso, che le due parti AQ, AR della fune (fig. 9) sieno poste in dirittura una dell'altra, e formino una sola linea retta. Egli è vero, che risoluto il peso P espresso per la retta verticale AC nelle due forze AM, AH la AM tende la parte AQ, e rilascia la AR, e l' altra forza AH s'impiega a far nascere un angolo in A. Ma quest' angolo o nasce, o non nasce. Se nasce, non siamo più nel caso, cioè le due parti della fune non formano più una linea retta sola, e allora si potrà trovare

vare la tensione dell' una, e dell' altra parte della fune col metodo solito, cioè sarà il peso totale P alla forza tendente la fune RA, come il seno dell' angolo RAQ al seno dell' angolo OAQ, e il peso totale P alla forza tendente l' altra fune QA, come il seno dell' angolo RAQ al seno dell' angolo OAR. E siccome l' angolo RAQ riuscirà pochissimo differente da due retti, onde il seno suo sarà piccolissimo, così è chiaro, che il peso tenderà le due parti di fune AQ, AR con una forza grandissima, onde bisognerà, che la coesione delle parti della fune tra di loro, e delle estremità R, Q ai punti fissi R, Q sia grandissima per non cedere, e strapparsi. Se poi l' angolo non nasce, come richiede il supposto, che le due parti AR, AQ della fune formino una retta sola, bisognerà, che la forza, con cui la fune resiste a lasciarsi piegare in A dalla forza AH, sia infinita rispetto a questa forza, altrimenti se avesse ad essa qualche proporzion finita la forza AH, questa produrrebbe qualche effetto, e farebbe nascere un angolo in A contro il supposto. Dunque nel supposto, che l' angolo in A non nasca, le parti della fune AR, AQ, e i punti R, Q fanno una forza infinita per reggere alla forza AH, rispetto alla qual forza infinita la AM, che tende

de AQ, e rilascia AR, è nulla. Dunque la natura stessa del supposto importa, che la forza, che fanno le parti della fune, e i punti fissi R, Q, sia infinita, e però non apparisce ombra di assurdo in questo risultato. E la pratica medesima è d'accordo con questo discorso, poichè si vede, che le chiavi di ferro, quando sono sommamente tese, onde non possan piegarsi, e fare un angolo, allorchè vi si appoggia un peso, si troncano, perchè la coesione del ferro non è capace di fare quella forza infinita, che allora dovrebbero fare per reggere a quel peso, laddove se non sono tanto tese, e si possono un poco piegare, formando così un qualche angolo viene a non essere più infinita la forza, che debbon fare per reggere il peso, la quale quantunque debba essere ancora grandissima, pure può non superar più la forza di coesione tra le parti del ferro.

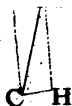
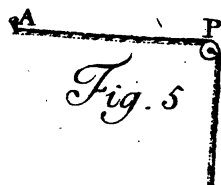
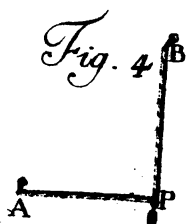
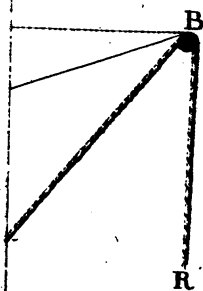
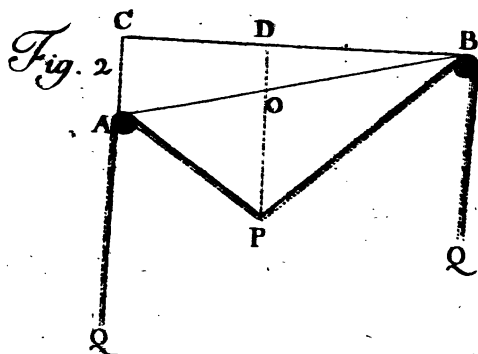
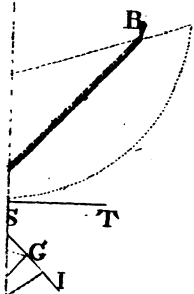
29. Queste sono le poche cose, che nella presente materia mi parvero di dover essere toccate, e poste in chiaro, le quali quando nel pubblicarle per me altro buon effetto non sortissero, quello credo non mi verrà mai meno di avere manifestato a voi, ed al pubblico la stima grandissima, che io fo del merito, e di voi, ove questo sì chiaramente risplende, al che prin-

cipal-

cipalmente ebbi l' animo rivolto nell' atto che pensai di renderle pubbliche a voi dirigendole. Altro mio tenue metafisico lavoro, di quella facoltà cioè nobilissima, che madre può dirsi di tutte le altre, fornendoci ella i principj generali delle cose tutte, voleva io a questo unire, e dirizzarlovi, ma le mie continue occupazioni, e la mia poca salute m' impedirono di dargli compimento, nè io poteva più lungamente frenare il desiderio di rendere a voi, e agli altri palese l' altissima stima, e venerazione, con cui riguardo la degnissima e per ogni titolo rispettabilissima vostra persona, e le profondissime e vastissime vostre cognizioni. Ricevete pertanto con quella gentilezza, e compatimento, che è proprio de' grandi uomini, e di voi particolarmente, questa mia piccola fatica, e se potete, con l' approvazion vostra animatemi a migliori cose, e credetemi intanto egualmente ammiratore de' rari vostri talenti, e delle vostre incomparabili produzioni, che amatore delle insigni vostre morali qualità, per le quali la delizia siete di chiunque vi conosce, ed ha la fortuna, che io tanto desidero, di poter conversare con voi.

F I N E.

Fig. 2.
D
B
I
L
K
P
T
C
H
G
O
A
q
Q
r
R
m
n
p
V
K
E
F

B
S
T
G
I
B
R
C
H
Fig. 2
C
D
B
O
A
P
Q
Q
Fig. 4
B
A
P
A
P
Fig. 5

LETTERE DUE

DEL SIG. CONTE

GIORDANO RICCATI

ALL' ORNATISSIMO PADRE

D. FRANCESCO MARIA FRANCESCHINIS

BERNABITA

Professore di Matematica nell' Università
di Bologna.

LETTERA I.

LA bellissima vostra Dissertazione *della Tensione delle Funi*, Ornatissimo Padre, che con grandissima mia obbligazione mi avete fatto l' onore d' indirizzarmi, io l' ho letta con tutta l' attenzione, e con tanto maggior piacere, quanto che ho chiaramente scorto, che in essa sostenete la verità. Attaccata (fig. 1) a due puntì fissi A, B la funicella APB, per cui possa scorrere liberamente il peso P descrivendo un' elisse, si fermerà questo nel punto più basso P, in cui la tangente FPT dell' elisse è orizzontale. La verticale PO esprima il peso P: la linea OP prorogata in D dividerà l' angolo APB in due parti eguali, essendo tali gli angoli APF, BPT per la nota proprietà dell' elisse. Il peso PO si può risolvere continuando la retta BP verso E, e conducendo pel punto O la OV parallela ad AP, ovvero la OE normale a BE. Giusto la prima risoluzione, che rettamente sostenete essere la genuina, la li-

nea PV dinota la tensione della funicella BP, e giusto la seconda prescelta dal dottissimo Ab. Frisio la detta funicella soffre la tensione PE. Quantunque Voi difendiate in molte guise, e tutte conchiudenti la vostra sentenza, permettetemi che con due nuovi raziocinj vie più la confermi.

Prolungo AP verso G, che s' intersecherà in G con OG parallela a BP, a cui meno normale PC, ed indi compio il parallelogrammo PGCI. Sia secondo l' opinione del Ch. Ab. Frisio PE la tensione della funicella BP, e vediamo qual sia l' ufficio della forza EO = PC. Non essendo PC in linea retta con AP, fa d' uopo risolverla nelle due, PG nella direzione di AP, che traéndo da P verso G, s' eguaglia alla tensione della cordicella AP; PI = GC nella direzione di PB, che traendo da P verso I, minora la tensione della funicella BP. S' eguaglierà pertanto essa tensione a PE — PI: ma PI = VE; dunque resterà = PV la tensione della funicella BP, ed essendo PV = PG, si scopriranno le giuste misure delle pari tensioni delle due cordicelle.

Si può obbiettare, che la forza PC = EO si deve anch' essa risolvere col metodo dell'

Ab.

Ab. Frisio, conducendo ad APG la normale CH, onde ne risulti la tensione PH minore di PG della corda AP. Dato compimento al rettangolo PHCK, e tirata KL a squadra di BP, la forza PK, che tira da P verso K, si risolve nelle due PL<PI, che diminuisce la tensione della corda BP, ed LK, che parimente risolta nella stessa guisa, determina una forza minore di HG, che aumenta la tensione della corda AP. Continuando le risoluzioni, ne nascono due serie infinite, una di scemamenti di tensione della corda BP, e l' altra di accrescimenti di tensione della corda AP, le somme delle quali s' eguagliano ad EV, HG, dimodochè si determinano le uguali tensioni PV, PG, benchè si sia ammesso il modo di risolvere prescelto dal celebre Ab. Frisio.

Passo al secondo raziocinio dedotto dal sicuro metodo delle azioni. Ai chiodi A, B (fig. 2) si sostituiscano due girelle, intorno alle quali si pieghino le cordicelle PAQ, PBR, da cui pendano i pesi eguali Q, R, che formino equilibrio col peso P. Si supponga, che il peso P discendendo pel minimo spazio verticale P*p*, faccia ascendere i due pesi Q, R, dimodochè la cordicella passi alla situazione *q*A*p*B*r*. Coi rag-

gi AP, BP si descrivano gli archetti Pm, Pn. Essendo eguali gli angoli APD, BPD, saranno adequatamente tali anche gli angoli mpP, npP; e poichè i triangoli mpP, npP sono rettangoli, ed hanno il lato comune Pp, se ne deduca la loro perfetta eguaglianza, e spezialmente quella dei lati omologhi mp, np. I pesi adunque Q, R sono ascesi per eguali spazj $Qq = mp$, $Rr = np$, ed hanno esercitate le azioni negative $Q.Qq$, $R.Rr$, mentre il peso P ne ha esercitata una positiva $P.Pp$. Richiede l' equilibrio, che l' azione positiva $P.Pp$ s' eguagli alla somma delle negative, onde mutuamente s' impediscano, nè segua moto. Avremo dunque $P.Pp = Q.Qq + R.Rr = 2Q.Qq = 2Q.mp$, e per conseguenza $\frac{P}{2}.Pp = Q.mp$,

e passando all' analogia, $\frac{P}{2} : Q :: mp : Pp$. Si descriva il parallelogrammo PVOGP come nella fig. 1, e si tiri la retta VG, che taglierà $PO = P$ in due parti eguali, e ad angoli retti nel punto K. L' angolo mpP è uguale all' angolo APD: ma questo s' eguaglia al KPG; dunque nei triangoli rettangoli mpP, KPG sono eguali gli angoli mpP, KPG, e perciò pas-

sa

sa fra loro similitudine, dimodochè si avvera l'analogia $mp : pP :: KP = \frac{1}{2}P : PG$: ma, come sopra ho provato, $mp : pP :: \frac{1}{2}P : Q$; dunque $\frac{1}{2}P : Q :: \frac{1}{2}P : PG$, e quindi $Q = PG$. E conciossiachè il peso Q s' eguagli alla tensione della funicella AP; una tale tensione verrà espressa da PG. In simil modo si dimostrerà $= PV$ la tensione della cordicella BP. Ed ecco messa in nuovo chiarissimo lume la legge delle tensioni delle funicelle AP, BP.

Quando Voi, stimatissimo Padre, considerate quelle posizioni (fig. 3) della corda APB, nelle quali la tangente al punto P dell' elisse non è orizzontale, supponete che il peso P non possa scorrere lungo la corda. Cotali posizioni saranno permanenti, qualora la corda APB non esca fuori dalle verticali AQ, BR. Assegnata per esempio ad essa la positura AP'B, il peso P' discenderebbe nella verticale BR, e se la corda AP', che finora si è considerata priva di gravità, fosse dotata d' un peso minimo rispettivamente al grave P', si adatterebbe ad una catenaria. Abbia pertanto la corda APB una posizione permanente, e tirata la verticale $PO = P$, e prorogate le rette AP, BP, si delinei il parallelogrammo PVOG, e si

con-

conducano le orizzontali GK, VL. Sarà PG la tensione della corda AP, che farà equilibrio colla porzione PK del peso P, e PV la tensione della corda BP, che farà equilibrio col residuo PL = KO del detto peso. Se ai chiodi A, B si sostituiscano due girelle, farà dí mestieri per mantener l' equilibrio, che sia il peso Q = PG, il peso R = PV; il che si può ancor dimostrare ponendo in opera il metodo delle azioni.

Da quanto ho scritto chiaramente comprendete, ornatissimo Padre, esser io penetrato dalla verità della sentenza, che sostenete. Se ha tanto pregio la Dissertazione da Voi pubblicata, non avrà certamente minor merito il Metafisico Lavoro, al quale la vostra salute, e le continue occupazioni non vi hanno permesso di dar compimento. Io desidero bensì, che promoviate le scienze col vostro raro talento; ma nello stesso tempo vi consiglio ad aver cura della vostra preziosa salute, la quale resa stabile e perfetta, vi darà campo di produrre frutti ben degni di Voi.

LET-

LETTERA II.

NELLA precedente mia lettera, ornatissimo Padre, ho asserito, che risolto alla maniera del Ch. Ab. Frisio il peso PO (fig. 4) nelle due forze PE, EO; la forza EO nelle due EF, FO; la forza EF nelle due HF, HE; la forza HF nelle due IH, IF; la forza IH nelle due KI, KH; la forza KI nelle due KL, LI; la forza KL nelle due ML, MK &c.; si determinano le due serie di forze EH, HK, KM &c.; OF, FI, IL &c. La prima serie minora la supposta tensione PE della corda BP, che finalmente si riduce uguale alla giusta misura PV. La seconda serie ci mette sotto gli occhi la tensione della corda AP, che finalmente si trova eguale ad VO = PG = PV. Quantunque la sola considerazione della figura renda manifesto, che la somma della prima serie s' eguaglia ad EV, la somma della seconda serie s' eguaglia ad OV; nulladimeno giudico confacente l' indagare la natura delle predette serie, e il computarne la somma.

Con-

Conciossiachè i triangoli VEO, VFE, VHF, VIH, VKI, VLK, VML &c. sieno tutti rettangoli, e simili, e per conseguenza parallele le linee EO, HF, KI, ML &c., ed altresì le linee EF, HI, KL &c.; avremo le analogie VO : VE :: VE : VF :: VF : VH :: VH : VI :: VI : VK :: VK : VL :: VL : VM &c.: ma VO : VE :: OF : EH, VE : VF :: EH : FI, VF : VH :: FI : HK, VH : VI :: HK : IL, VI : VK :: IL : KM &c.; dunque formando le linee VO, VE, VF, VH, VI, VK, VL, VM &c. una continua serie geometrica, lo stesso si avvera anche delle linee OF, EH, FI, HK, IL, KM &c. Ora ponendo OV $= a$, VE $= na$, sarà EO $= a\sqrt{(1 - n^2)}$: ma
OV : EO :: EO : OF, ossia algebraicamente $a : a\sqrt{(1 - n^2)} :: a\sqrt{(1 - n^2)} : a.(1 - n^2)$; dunque resta stabilito il valore di OF $= a.(1 - n^2)$. Di più stando
VO : VE $= n$.VO :: OF : EH, sarà EH $= n$.OF $= na.(1 - n^2)$. Avremo pertanto proseguendo la serie geometrica continua, OF $= a.(1 - n^2)$, EH $= na.(1 - n^2)$, FI $= n^2a.(1 - n^2)$, HK $= n^3a.(1 - n^2)$, IL $= n^4a.(1 - n^2)$, KM $= n^5a.(1 - n^2)$ &c., e quin-

quindi saranno parimente in serie geometrica continua

$OF = a.(1 - n^2)$, $FI = n^2 a.(1 - n^2)$, $IL = n^4 a.(1 - n^2)$ &c.

$EH = na.(1 - n^2)$, $HK = n^3 a.(1 - n^2)$, $KM = n^5 a.(1 - n^2)$ &c.

Queste due serie si possono ancora esprimer così

$a.(1 - n^2).(1 + n^2 + n^4$ &c.$)$

$na.(1 - n^2).(1 + n^2 + n^4$ &c.$)$

E poichè n è minore dell'unità, sappiamo essere

$1 + n^2 + n^4$ &c. $= \frac{1}{1 - n^2}$. Il perchè scopriremo

$a.(1 - n^2).(1 + n^2 + n^4$ &c.$) = a = VO$,

$na.(1 - n^2).(1 + n^2 + n^4$ &c.$) = na = VE$,

e ne dedurremo, che ancor fatto uso del modo di risolvere del celebre Ab. Frisio, si determinano le vere tensioni PV, VO = PG delle due corde BP, AP.

F I N E.